ثانوية الجولان التأهيلية	السنة الثانية بكالوريا علوم رياضية	السنة الدراسية : 2010 – 2011	سلسلة التمارين رقم :02 الأستاذ : أحمد مومنى

المتتاليات العددية

التمرين 01

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي:

$$f(x)=\frac{x\operatorname{Arctan} x}{\pi}$$

و (U_n) المتتالية العددية المعرفة بالصيغة الترجعية التالية:

$$\begin{cases} U_0\in\left]0,1\right] \\ U_{n+1}=\dfrac{U_n\operatorname{Arctan}U_n}{\pi} \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

1 – a – بين أن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$

b – تحقق أن لكل x من $\mathbb{R}^+$: $f(x)\le\frac{1}{2}x$

2 – a – بين أن: $0\langle U_{n+1}\le\frac{1}{2}U_n \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

b – بين أن: $0\langle U_n\le 1 \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

c – استنتج أن (U_n) متقاربة

3 – استنتج أن: $0\langle U_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n U_0 \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

و حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

4 – نعتبر المتتالية العددية (S_n) المعرفة كمايلي:

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad S_n=U_0+U_1+\cdots+U_n$$

a – تحقق أن (S_n) تزايدية قطعا

b – بين أن:

$$(n\in\mathbb{N})\quad U_0\le S_n\le 2U_0\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

c – استنتج أن (S_n) متقاربة

التمرين 02

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي: $f(x)=\left(\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{2}\right)^3$

1 – أدرس رتابة f على $\mathbb{R}^+$ و تحقق أن $f\left(\left[0,1\right[\right)\subset\left[0,1\right[$

2 – بين أن لكل x من $\mathbb{R}^+$:

$$f(x)-x=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\left(\frac{1}{4}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)+\sqrt[3]{x^2}\right)$$

3– لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بالصيغة الترجعية التالية

$$\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=\left(\dfrac{1+\sqrt[3]{U_n}}{2}\right)^3; \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

a – بين أن : $0\le U_n<1 \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

b – حدد رتابة المتتالية (U_n) واستنتج أنها متقاربة محددا نهايتها

4 – لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $V_n=-1+\sqrt[3]{U_n}$

a – بين أن المتتالية (V_n) هندسية محددا أساسها وحدها الأول

b – استنتج ان: $U_n=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^3 \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

c – أحسب بدلالة n : $W_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(k+V_k)$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}W_n$

d– لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع :

$$S_n=(U_1)^{\frac{1}{3}}+(U_2)^{\frac{1}{3}}+\cdots+(U_n)^{\frac{1}{3}}$$

بين: $S_n=n-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

التمرين : 03

لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بالصيغة الترجعية التالية:

$$\begin{cases} U_0 = \alpha \in]1,+\infty[\\ U_{n+1} = \dfrac{\alpha U_n + 1}{U_n} \quad ; \quad (\forall n \in N) \end{cases}$$

نعتبر المتتاليتين العدديتين (V_n) و (W_n) المعرفتين بما يلي:

$$V_n = U_{2n} \quad \text{و}$$
$$(\forall n \in N) \quad W_n = U_{2n+1}$$

1– بين أن: $(\forall n \in N): \quad \alpha \le U_n \langle \alpha + 1$

2 – a – بين أن:

$$(\forall n \in N) \quad V_{n+1} = \alpha + \frac{V_n}{\alpha V_n + 1}$$

b – بين أن:

$$(\forall n \in N) \quad W_{n+1} = \alpha + \frac{W_n}{\alpha W_n + 1}$$

c – استنتج أن: $(\forall n \in N) \quad V_n \langle W_n$

3 – a – بين أن المتتالية (V_n) تزايدية قطعا

b – استنتج أن المتتالية (W_n) تناقصية قطعا

4 – a – بين أن :

$$(\forall n \in N) \quad W_{n+1} - V_{n+1} \le \frac{1}{(\alpha^2+1)^2}(W_n - V_n)$$

b – استنتج أن:

$$(\forall n \in N) \quad 0 \langle W_n - V_n \langle \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(\alpha^2+1)^2}\right)^n$$

c – استنتج أن المتتاليتين (V_n) و (W_n) متحاديتين

5 – a – بين أن (V_n) متقاربة و أن

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2}$$

b – نضع $\beta = \dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2}$ بين أن :

$$(\forall n \in N) \quad | U_n - \beta | \le \left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^n |\beta - \alpha|$$

c – استنتج : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

التمرين :04

.

f دالة عددية معرفة على IR بما يلي:

$$f(x) = 2\left(\frac{\pi}{2} - Arc\tan|x|\right)$$

1 – لتكن $(U_n)_{n\ge 1}$ المتتالية العددية المعرف بما يلي:

$$U_n = 2\left(Arc\tan 1 + 2Arc\tan\frac{1}{2} + \cdots + nArc\tan\frac{1}{n}\right)$$

a – تحقق أن : $(\forall n \in IN^*) \quad U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} kf(k)$

b – بين أن :

$$(\forall n \in IN^*) \quad n(n+1)Arc\tan\frac{1}{n} \le U_n \le \frac{\pi n(n+1)}{4}$$

c – استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

2 – بين أنه: $(\exists! \alpha \in]1,2[) / f(\alpha) = \alpha$

3– نعتبر المتتالية العددية (V_n) المعرفة بالصيغة الترجعية التالية

$$\begin{cases} V_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ V_{n+1} = \pi - 2Arc\tan(V_n) \quad , \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$$

ولتكن (W_n) و (S_n) المتتاليتين العدديتين المعرفتين بما يلي:

$$(\forall n \in IN) \quad S_n = V_{2n+1} \quad \text{و} \quad W_n = V_{2n}$$

a – بين أن: $(\forall n \in IN) \quad 0 \langle V_n \langle \pi$

b – بين أن: $W_{n+1} = (fof)(W_n)$ و

$$(\forall n \in IN) \quad S_{n+1} = (fof)(S_n)$$

c – بين أن: $(\forall n \in IN) \quad W_n \langle \alpha \langle S_n$

التمرين 05:

نضع : $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بالصيغة الترجعية التالية

$$\begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \end{cases} \quad (\forall n \in N)$$

1 – تحقق أن : $\omega^2 = \omega + 1$ و أن $\omega - 1 = \frac{1}{\omega}$

2 – بين أن : $U_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\omega^{n+1} - (1-\omega)^{n+1}\right) \quad (\forall n \in IN)$ و استنتج $\lim_{n\to+\infty} U_n$

3 – نعتبر المتتالية العددية (V_n) المعرفة بما يلي: $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n} \quad (\forall n \in IN)$

a – بين أن : $\omega^{n+1}(V_n - \omega)U_n = (-1)^{n+1} \quad (\forall n \in IN)$

b – بين أن (V_n) متقاربة وحدد نهايتها

....

التمرين : 06

ليكن α عددا حقيقيا من المجال $]1, +\infty[$ و N عددا صحيحا طبيعيا بحيث: $N - 1 \le \sqrt{\alpha} \le N$

و لتكن (U_n) و (V_n) المتتاليتين العدديتين المعرفتين كما يلي:

$$\begin{cases} U_0 = N \\ U_{n+1} = \frac{U_n^2 + \alpha}{2U_n} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \text{و} \quad \begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \frac{V_n + \sqrt{\alpha}}{2} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1 – a – بين أن: $U_{n+1} - \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2U_n}\left(U_n - \sqrt{\alpha}\right)^2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

b – بين أن (U_n) تناقصية

c – استنتج أن: $\sqrt{\alpha} \le U_n \le N \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2 – a – بين أن: $0 \le U_n - \sqrt{\alpha} \le \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right)^{\sum_{k=0}^{n-1} 2^k} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

b – استنتج أن: $0 \le U_n - \sqrt{\alpha} \le \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right)^{2^n - 1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} U_n$

3 – نعتبر المتتالية العددية (W_n) المعرفة بما يلي: $W_n = V_n - \sqrt{\alpha} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

a – بين أن : (W_n) متتالية هندسية

b – استنتج $\lim V_n$